Reelle Algebra und Einführung in die o-Minimalität

Blatt 7

Abgabe: 09.07.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**

In einem reell abgeschlossener Körper K sei $Z \subset K^n$ eine beliebige Teilmenge sowie S eine Teilmenge des Polynomrings $K[T_1, \dots, T_n]$. Definiere

$$\mathcal{I}(Z) = \{f \in K[T_1, \dots, T_n] \mid f(\bar{a}) = 0 \text{ für alle } \bar{a} \in Z\}$$

und

$$\mathcal{V}(S) = \{\bar{a} \in K^n \mid f(\bar{a}) = 0 \text{ für alle } f \in S\}.$$

a) Zeige, dass für jede Teilmenge Z aus K^n die Menge $\mathcal{I}(Z)$ ein Ideal von $K[T_1, \dots, T_n]$ und dass $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I})) \supset \mathcal{I}$ für jedes Ideal $\mathcal{I}$.

b) Hilberts Basissatz besagt insbesondere, dass im Polynomring $K[T_1, \dots, T_n]$ über einem Körper K jedes Ideal endlich erzeugt ist. Wenn $\mathcal{I}$ durch $f_1, \dots, f_m$ erzeugt wird, zeige, dass $\bar{a}$ in $\mathcal{V}(\mathcal{I})$ genau dann liegt, wenn $f_1(\bar{a}) = \ldots = f_m(\bar{a}) = 0$.

c) Wenn $\mathcal{P}$ ein reelles Primideal ist, zeige, dass $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$.

Hinweis: Blatt 6 (b) und QE.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur erster Stufe in einer Sprache $\mathcal{L}$, welche ein zweistelliges Relationszeichen $<$ enthält, derart, dass die Interpretation $<^{\mathcal{M}}$ eine dichte lineare Ordnung auf M definiert. Wir betrachten M als topologischen Raum mit der Ordnungstopologie.

a) Gegeben eine definierbare Teilmenge X von M^n und eine definierberare Abbildung $f : X \to M$ (möglicherweise mit Parametern), zeige, dass die Teilmenge $Y = \{x \in X \mid \lim\limits_{z \to x} f(z) \text{ existiert } \}$ definierbar in $\mathcal{M}$ ist.

b) Zeige, dass der Graph der Abbildung $\begin{array}{ccc} Y & \to & M \\ x & \mapsto & \lim\limits_{z \to x} f(z) \end{array}$ definierbar ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.